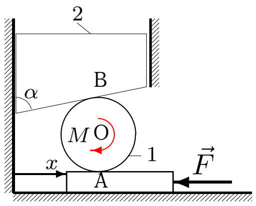
Примеры решения механических задач с одной степенью свободы с помощью уравнений Лагранжа 2-го рода:



1.81. Цилиндр радиуса R прижимается скошенным прессом (призмой) к пластине, скользящей по гладкой горизонтальной поверхности. Масса цилиндра m_1, призмы — m_2. К цилиндру приложен момент M, к пластине — горизонтальная сила F. Проскальзывание в точках контакта цилиндра отсутствует. За обобщенную координату принять перемещение пластины x.

Решение

Выразим скорости тел через обобщенную координату:

Составим граф: $A \xrightarrow[\pi/2]{1} O \xrightarrow[\pi-\alpha]{1} B$

$V_{Bx} = V_{Ax} - \omega_{1z} R \sin(\pi/2) - \omega_{1z} R \sin(\pi - \alpha)$

$V_{By} = V_{Ay} + \omega_{1z} R \cos(\pi/2) + \omega_{1z} R \cos(\pi - \alpha)$

Преобразуем, учитывая, что $V_{Ax} = \dot{x} \quad V_{Ay} = 0 \quad V_{Bx} = 0$:

$V_{By} = -\cos\alpha\omega_{1z} R$

$0 = \dot{x} - \omega_{1z} R - \omega_{1z} R \sin\alpha \quad \Rightarrow \omega_{1z} = \dfrac{\dot{x}}{R + R\sin\alpha}$

Составим граф: $A \xrightarrow[\pi/2]{1} O$

$V_{Ox} = V_{Ax} - \omega_{1z} R \sin(\pi/2)$

Преобразуем: $V_{Ox} = \dot{x}\dfrac{\sin\alpha}{1+\sin\alpha}$

Кинетическая энергия:

$$T = \frac{I_1\omega_{1z}^2}{2} + \frac{m_1 V_{0x}^2}{2} + \frac{m_2 V_{By}^2}{2}$$

$$T = \frac{m_1\dot{x}^2}{4(1+\sin\alpha)^2} + \frac{m_1\dot{x}^2\sin\alpha^2}{2(1+\sin\alpha)^2} + \frac{m_2\cos\alpha^2\dot{x}^2}{2(1+\sin\alpha)^2}$$

$$T = \frac{\dot{\varphi}^2}{2}A$$

где $\quad A = \dfrac{m_1 + 2m_1\sin\alpha^2 + 2m_2\cos\alpha^2}{2(1+\sin\alpha)^2}$

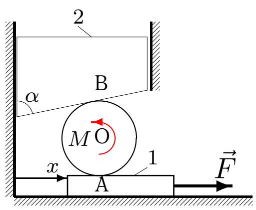
Обобщенная сила:

$$Q = (-FV_{Ax} - M\omega_{1z} - m_2 g V_{By})/\dot{x}$$

$$Q = -F - \frac{M}{R + R\sin\alpha} + \frac{m_2 g\cos\alpha}{1+\sin\alpha}$$

Уравнение движения:

$$A\ddot{x} = -F - \frac{M}{R + R\sin\alpha} + \frac{m_2 g\cos\alpha}{1+\sin\alpha}$$



1.82. Цилиндр радиуса R прижимается скошенным прессом (призмой) к пластине, скользящей по гладкой горизонтальной поверхности. Масса пластины m_1, призмы — m_2. К цилиндру приложен момент M, к пластине — горизонтальная сила F. Проскальзывание в точках контакта цилиндра отсутствует. За обобщенную координату принять перемещение пластины x.

Решение

Выразим скорости тел через обобщенную координату:

Составим граф: $A \xrightarrow[\pi/2]{1} O \xrightarrow[\pi-\alpha]{1} B$

$V_{Bx} = V_{Ax} - \sin(\pi/2)\omega_{1z}R - \sin(\pi-\alpha)\omega_{1z}R$

$V_{By} = V_{Ay} + \cos(\pi/2)\omega_{1z}R + \cos(\pi-\alpha)\omega_{1z}R$

Преобразуем, учитывая, что $V_{Ax} = \dot{x} \quad V_{Ay} = 0 \quad V_{Bx} = 0$:

$V_{By} = -\omega_{1z}R\cos\alpha$

$0 = \dot{x} - \omega_{1z}R - \omega_{1z}R\sin\alpha \quad \Rightarrow \omega_{1z} = \dfrac{\dot{x}}{R + R\sin\alpha}$

Кинетическая энергия:

$$T = \frac{m_1 V_{Ax}^2}{2} + \frac{m_2 V_{By}^2}{2}$$

$$T = \frac{m_1\dot{x}^2}{2} + \frac{m_2\cos\alpha^2\dot{x}^2}{2(1+\sin\alpha)^2}$$

$$T = \frac{\dot{\varphi}^2}{2}A$$

где

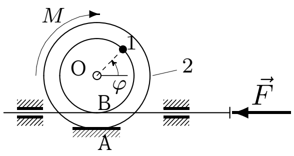
$$A = m_1 + \frac{m_2\cos\alpha^2}{(1+\sin\alpha)^2}$$

Обобщенная сила:

$$Q = (FV_{Ax} + M\omega_{1z} - m_2 g V_{By})/\dot{x} = F + \frac{M}{R + R\sin\alpha} + \frac{m_2 g\cos\alpha}{1+\sin\alpha}$$

Уравнение движения:

$$A\ddot{x} = F + \frac{M}{R + R\sin\alpha} + \frac{m_2 g\cos\alpha}{1+\sin\alpha}$$



1.83. Внешним ободом блок катится по неподвижной поверхности, внутренним — касается подвижного штока. На внутреннем ободе блока расположена точка массой m_1. Радиусы блока R и r. Масса блока m_2, радиус инерции — ρ. К блоку приложен момент M, к штоку — сила F. За обобщенную координату принять φ.

Решение

Выразим скорости тел через обобщенную координату:

Составим граф: $A \xrightarrow[\pi/2]{2} O$

$V_{Ox} = V_{Ax} - \omega_{2z} R \sin(\pi/2)$

Преобразуем, учитывая, что $V_{Ax} = 0 \quad V_{Ay} = 0 \quad \omega_{2z} = \dot\varphi$:

$V_{Ox} = -\dot\varphi R$

Составим граф: $O \xrightarrow[-\pi/2]{2} B$

$V_{Bx} = V_{Ox} - \omega_{2z} r \sin(-\pi/2)$

$V_{Bx} = -\dot\varphi(R - r)$

Составим граф: $O \xrightarrow[\varphi]{2} 1$

$V_{1x} = V_{Ox} - \omega_{2z} r \sin\varphi$

$V_{1y} = V_{Oy} + \omega_{2z} r \cos\varphi$

Преобразуем:

$V_{1x} = -\dot\varphi R - \dot\varphi r \sin\varphi$

$V_{1y} = \dot\varphi r \cos\varphi$

Кинетическая энергия:

$T = \dfrac{I_2 \omega_{2z}^2}{2} + \dfrac{m_2 V_{0x}^2}{2} + \dfrac{m_1 V_1^2}{2}$

$T = \dfrac{m_2 \rho^2 \dot\varphi^2}{2} + \dfrac{m_2 \dot\varphi^2 R^2}{2} + \dfrac{m_1(\dot\varphi^2 R^2 + 2\dot\varphi^2 R r \sin\varphi + \dot\varphi^2 r^2)}{2}$

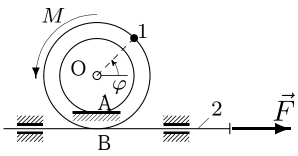
$T = \dfrac{\dot\varphi^2}{2} A + \dfrac{\dot\varphi^2}{2} B \sin\varphi \quad$ где $\quad A = m_1(R^2 + r^2) + m_2(\rho^2 + R^2) \quad B = 2 m_1 r R$

Обобщенная сила:

$$Q = (-F V_{Bx} - M\omega_{2z} - m_1 g V_{1y})/\dot x = F(R - r) - M - m_1 g r \cos\varphi$$

Уравнение движения:

$$A\ddot\varphi + B\ddot\varphi B \sin\varphi + 0.5\dot\varphi^2 B \cos\varphi = F(R - r) - M - m_1 g r \cos\varphi$$



1.84. Внутренним ободом блок катится по неподвижной поверхности, внешним — касается штока, скользящего в горизонтальных направляющих. На блоке расположена точка массой m_1. Радиусы блока R и r. Масса штока m_2. К блоку приложен момент M, к штоку — сила F. За обобщенную координату принять φ.

Решение

Выразим скорости тел через обобщенную координату:

Составим граф: $A \xrightarrow[\pi/2]{OA} O$

$V_{Ox} = V_{Ax} - \omega_{OAz} r \sin(\pi/2)$

Преобразуем, учитывая, что $V_{Ax} = 0 \quad V_{Ay} = 0 \quad \omega_{OAz} = \dot{\varphi}$:

$V_{Ox} = -\dot{\varphi} r$

Составим граф: $O \xrightarrow[-\pi/2]{2} B$

$V_{Bx} = V_{Ox} - \omega_{OAz} R \sin(-\pi/2)$

$V_{Bx} = \dot{\varphi}(R - r)$

Составим граф: $O \xrightarrow[\varphi]{2} 1$

$$V_{1x} = V_{Ox} - \omega_{2z} R \sin\varphi, \; V_{1y} = V_{Oy} + \omega_{2z} R \cos\varphi$$

Преобразуем:

$$V_{1x} = -\dot{\varphi} r - \dot{\varphi} R \sin\varphi, \; V_{1y} = \dot{\varphi} R \cos\varphi$$

Кинетическая энергия:

$$T = \frac{m_2 V_{Bx}^2}{2} + \frac{m_1 V_1^2}{2},$$

$$T = \frac{m_2 \dot{\varphi}^2 (R - r)^2}{2} + \frac{m_1(\dot{\varphi}^2 r^2 + 2\sin\varphi \dot{\varphi}^2 R r + \dot{\varphi}^2 R^2)}{2},$$

$$T = \frac{\dot{\varphi}^2}{2} A + \frac{\dot{\varphi}^2}{2} B \sin\varphi \quad ,$$

где $\quad A = m_1(R^2 + r^2) + m_2(R - r)^2 \quad B = 2m_1 r R$. Обобщенная сила:

$$Q = (F V_{Bx} + M\omega_{2z} - m_1 g V_{1y})/\dot{x} = F(R - r) + M - m_1 g R \cos\varphi.$$

Уравнение движения:

$$A\ddot{\varphi} + B\ddot{\varphi} B \sin\varphi + 0.5\dot{\varphi}^2 B \cos\varphi = F(R - r) + M - m_1 g R \cos\varphi$$